

Matematica e tecnologie: un'interazione dinamica

Francesca Berengo, Monica Terenghi

Insegnanti di matematica presso l'IIS ITSOS M.Curie di Cernusco s/N (MI)

francesca.berengo@gmail.com, monica.terenghi@gmail.com

Introduzione

Senza la pretesa di rifare qui la storia dell'uso della tecnologia per "fare matematica", dagli stanzoni delle università interamente occupati da enormi elaboratori e da perforatrici di schede degli anni '70 siamo passati ai laboratori di informatica dotati di PC nelle scuole, fino ad arrivare alle LIM, ai netbook e ai tablet che gli studenti usano direttamente in classe senza nemmeno più bisogno delle *aule di informatica* collegandosi direttamente alla rete wireless.

Il PNI (Piano Nazionale dell'Informatica) del 1985 è stato il primo tentativo di introdurre l'informatica nei programmi di matematica delle scuole superiori. Si mirava a fornire allo studente strumenti utili per l'analisi dei problemi *"attraverso sia la costruzione di un programma e il controllo della sua esecuzione, sia l'utilizzo di programmi già disponibili e di software di utilità"*¹.

A questo sono seguiti nel tempo decine di altri progetti e sperimenta-

¹ C.M. 6 febbraio 1991, n. 24.

zioni per l'insegnamento della matematica con le tecnologie che hanno coinvolto scuole di ogni ordine e grado. Di pari passo si sono evoluti e incrementati i software disponibili per produrre materiali didatticamente validi.

Gli strumenti di ieri

Dalle risorse per la matematica prodotte nel tempo nel nostro istituto si può vedere come i software che abbiamo utilizzato si siano modificati con l'andare degli anni, sia perché sono stati creati nuovi software specificamente dedicati a certe attività, sia perché magari i software disponibili erano proprietari oppure non semplici da utilizzare.

Fin dall'inizio ci è sembrato che una delle grandi opportunità offerte dalle tecnologie fosse quella di rendere possibile la produzione di oggetti didattici **interattivi**. Al di là degli ipertesti, ci interessava in particolare creare **attività guidate** di geometria e di algebra da proporre agli studenti del biennio nell'ora curricolare di laboratorio, dove erano installati i software **Cabri** e **Derive** oltre che al pacchetto Office della Microsoft.

In molti casi siamo state costrette a piegare software, programmati per altre funzionalità, alle esigenze che avevamo in quel momento. Per esempio in uno dei primi progetti cui abbiamo partecipato² abbiamo utilizzato Excel per produrre il *crucinumbero* (Figura 1) oppure le verifiche di autovalutazione (sorta di tutorial in cui a seconda delle risposte digitate si aprivano dei fogli diversi che fornivano un feedback allo studente).

² Progetto RAP-Recupero/Approfondimento di Matematica nel biennio, iniziato nel 1999 e portato avanti fino al 2005 <http://bbs.tes.mi.it/RAP/rapweb/home.htm>

Completare lo schema di sinistra mantenendo una cifra per casella (il segno meno va messo nella stessa casella della prima cifra del numero a cui si riferisce). Se innanzi la cifra giusta l'elaboratore completa lo schema di destra, altrimenti l'errore viene segnalato da punti interrogativi.

NUMERI CROCIATI

ORIZZONTALI

1) $2^3 \cdot 3^2$	8) $(15 - 4) \cdot 7 - 1$	17) $\frac{10}{2} \cdot \left(3 - \frac{21}{2} \right)$	20) $- 2^2 \cdot 2^2 \cdot (4 - 6)$
2) $2 + 3 - 4$	9) $12^2 : (2 : 2)$	18) $72 : 4 \cdot 3$	21) L'opposto del quadrato di 7
3) $(-3)^2 - 4^2$	10) Il doppio del quadrato di 9	19) Il reciproco della metà di $\frac{1}{12}$	22) $- 24 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)$
4) $- 8 : (8 : 1) - (-4)$	11) $11 + 10^2 \cdot 2^2$	20) Il reciproco della metà di $\frac{1}{12}$	23) L'opposto della somma tra 140 e 30
5) $120 : 2 \cdot 2$	12) $(15 + 4) : (9 - 1)$	21) $25 \cdot (-2)^2$	

VERTICALI

1) $2^3 + 3^3$	7) La differenza tra l'opposto di 22 e l'opposto di 56	11) $(-3)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2^2$	16) $- 9 - \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^4 \right]$
2) $(-4)^3 - 2$	8) $40 - (13 - 11)$	12) Il quadrato del doppio di 9	17) Il quadrato dell'opposto di 11
3) $- 5^2 \cdot 2^2$	9) $\left(\frac{1}{2} \right)^2 - 2^2$	13) Il doppio di 210 aumentato di 1	18) $15 - 4 \cdot (9 - 1)$
4) $2^2 - 2^2$	10) Il doppio di 210, aumentato di 1	14) $(90 - (3 - 17))$	19) Il doppio di 5 sottratto da 100
5) $- 24 \cdot (-2)^2$			

Fig. 1 – Crucinumeri

La conoscenza di *Hot Potatoes*, che permette di realizzare test con feedback automatico o cruciverba, e per di più di trasformarli in pagine web, ci avrebbe sicuramente risparmiato una gran mole di lavoro, tant'è che alcuni anni dopo le verifiche di autovalutazione sono state trasformate in test Hot Potatoes a risposta multipla da svolgere online anziché in locale.

Sempre nello stesso progetto con Excel o con Paint e successivamente con *Quandary*, che allora richiedeva l'acquisto della licenza, sono state realizzate le verifiche di fine percorso mascherate sotto forma di gioco (Figura 2).



Fig. 2 – Labirinto La grande piramide realizzato con Quandary

Via via però che si diffondeva il possesso di un computer nelle famiglie, abbiamo cercato delle soluzioni che ci permettessero di realizzare oggetti digitali da proporre per **attività di recupero/consolidamento** da svolgere anche a casa e che fossero quindi fruibili a prescindere dal fatto che sul computer fosse installato un particolare software, soprattutto se proprietario.

Ci servivano quindi programmi che fossero in grado di esportare in formato html i file creati, in modo che fossero riproducibili da un qualunque browser.

Poiché Derive non permetteva la trasformazione dei suoi file in pagine web, mentre CabriJava consentiva di farlo con i file di Cabri, in due progetti successivi^{3 4} ci siamo indistriate per piegare **Cabri**, programma proprietario pensato per lo studio dinamico della geometria, all'utilizzo nella rappresentazione grafica di funzioni. Il software ci ha dato enormi

³ SIR2 Intranet regionale per la didattica e la formazione in rete (2001-2003) <http://www.tes.mi.it/sir2portale/home.htm>

⁴ BiTE Bridging the gap between the Traditonale and the E-Learning environment (2001-2003) <http://bbs.tes.mi.it/biteweb2/>

problemi sia per quanto riguarda l'uso in locale che per la trasformazione in pagina web attraverso CabriJava. Per esempio, almeno nelle prime versioni, per ottenere il grafico di una funzione era necessario procedere alla sua costruzione come luogo di punti. Inoltre, dato che i luoghi geometrici non erano riconosciuti come oggetti, non era possibile fare intersezioni e quindi disegnare per esempio una tangente resistente al trascinamento del punto sul grafico della funzione se non con artifici che abbiamo dovuto architettare per raggiungere il nostro scopo (Figura 3).

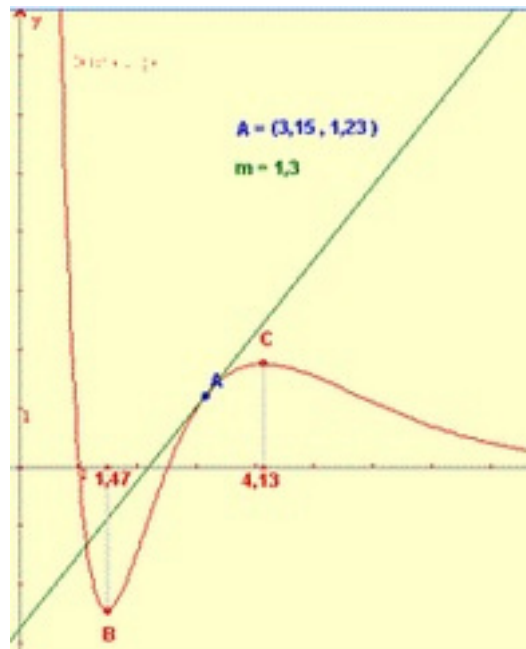


Fig. 3 – Utilizzo di Cabri piegato allo studio di funzioni

La possibilità di svincolare la fruizione della risorsa didattica dal software con il quale era stata creata, mediante la sua trasformazione in pagina web, ci dava inoltre la possibilità, anche se con qualche difficoltà in più, di far fare un po' di matematica con le tecnologie anche a quelle classi di triennio per le quali non era prevista l'ora di laboratorio di matematica. L'organizzazione di questa parte di attività didattica avveniva quindi mediante interazioni su classi virtuali, ai tempi ospitate, nel nostro istituto, dalla piattaforma First Class (cfr. *Quasi vent'anni di classi virtuali*

all'ITSOS di Cernusco).

Gli strumenti di oggi

La comparsa e il diffondersi di software versatili e free, come ad esempio **GeoGebra** ed **eXelearning**, ci consentono di realizzare molto facilmente e confezionare più efficacemente risorse digitali adatte al *learning by doing* e all'apprendimento per scoperta.

GeoGebra è un software estremamente flessibile che nasce per lo studio della geometria dinamica ma consente l'analisi di funzioni, riconosce i luoghi geometrici, consente non solo di inserire immagini ma anche di scriverci sopra; nella sua ultima versione permette anche di operare con i numeri complessi e di rappresentarli sul piano di Gauss o in coordinate polari, è integrato con un editor di formule (in linguaggio **LaTeX** con i comandi più comuni in un menu a tendina) e con un foglio di calcolo, consente infine l'esportazione dei fogli di lavoro come pagine Web con commenti e indicazioni di lavoro. Ma soprattutto è un software gratuito che gli studenti possono scaricare e utilizzare a casa per svolgere i compiti o comprendere meglio quanto fatto in classe.

Exelearning è un software dedicato agli insegnanti, semplice da usare, attraverso il quale è possibile sviluppare risorse didattiche anche molto articolate ed esportarle in formato HTML o SCORM; è inoltre possibile integrare file prodotti con GeoGebra.

Nei progetti più recenti⁵ ⁶abbiamo inserito all'interno di pagine web o di test interattivi, creati con eXelearning, grafici e attività dinamiche realizzate con GeoGebra.

⁵ SLOOP Sharing Learning Objects in a Open Perspective (2005-2007) <http://www.sloopproject.eu/sloop/>

⁶ SLOOP2desc Sharing Learning Objects in an Open Perspective to Develop European Skills and Competences (2009-2011) <http://www.sloop2desc.eu/>

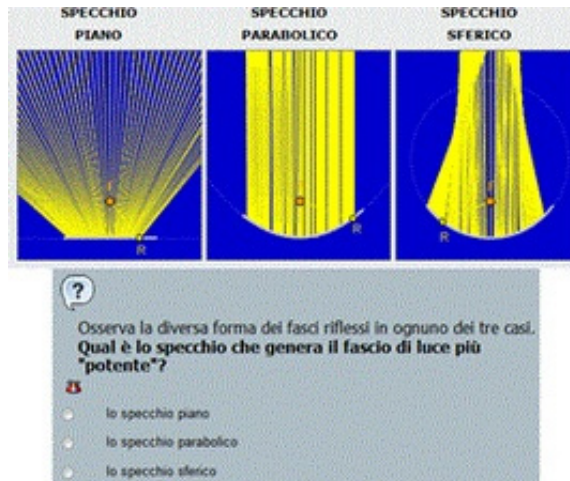


Fig. 4a – Uso integrato di eXelearning e GeoGebra

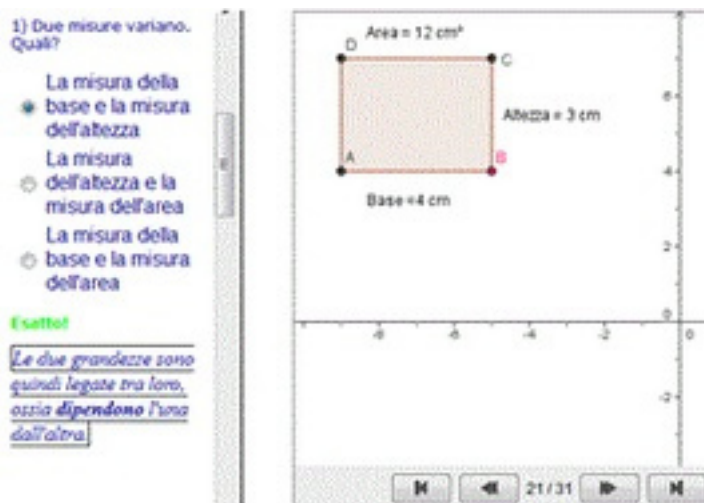


Fig. 4b – Uso integrato di eXelearning e GeoGebra

Il diffondersi tra i ragazzi del possesso di *telefoni cellulari con videocamera integrata* ci ha dato l'opportunità di far loro filmare alcune attività laboratoriali svolte in classe (è vero che l'uso dei cellulari a scuola era vietato da una [direttiva ministeriale](#), ma l'incriminazione riguardava un uso scorretto dello strumento durante l'attività didattica).

I commenti audio ai video, anch'essi fatti dai ragazzi, erano inseriti in un secondo momento e affiancati da immagini dinamiche create con GeoGebra. Il tutto veniva poi catturato da uno screencast *free*, [Camstudio](#), che ai tempi aveva però il difetto di deformare leggermente le immagini (difetto non da poco quando si stanno studiando i poligoni regolari!) - Vedere a tal proposito "[Costruire un ottagono regolare](#)"

Il fatto inoltre che, in questo esempio specifico, comparissero solo le mani dei ragazzi e non il volto né altri elementi che li rendessero riconoscibili, ci ha svincolato da eventuali problemi o restrizioni per la loro pubblicazione su YouTube.

Oggi sono disponibili diversi software *free* che permettono di realizzare *screencast* di ottima qualità.

Anche i software che gestiscono le LIM offrono la possibilità di registrare il contenuto della lezione (compreso l'audio) e di renderla quindi disponibile in momenti differiti.

L'ambiente

Di fondamentale importanza è anche l'ambiente che si utilizza per proporre le attività didattiche.

Una piattaforma come [Moodle](#) consente:

- allo studente di disporre di materiali organizzati per argomento sia per l'attività da svolgere in classe che per i compiti da eseguire a casa,
- all'insegnante di interagire direttamente con gli studenti anche in momenti al di fuori dell'orario scolastico.

Negli ultimi anni, a partire dal 2007, abbiamo creato per le nostre classi ambienti Moodle, in cui sono stati inseriti link a materiali selezionati presenti nella rete, o proposte attività da svolgere in laboratorio o a casa con l'uso di software opportuni, oppure pacchetti SCORM di nostra creazione completi di lezioni, attività interattive, test di verifica (Figura 5).

Equazioni

Quando si arriva all'algebra e si deve operare con x e y , c'è il desiderio naturale di saper cosa sono realmente x e y . Questo, almeno, era il mio sentimento: io ho sempre pensato che l'insegnante sapesse che cosa erano x e y ma che lei non me l'avrebbe mai detto. (Bertrand Russell)

Apri il file "definizioni sulle equazioni", ripassa leggendo il testo, infine svolgi gli esercizi che trovi cliccando sul link in basso nella pagina e controlla i risultati

 [Definizioni sulle equazioni](#)

Principi di equivalenza

 [Equazioni e bilance](#)

Apri il file "principi di equivalenza", ripassa leggendo il testo, infine svolgi gli esercizi che trovi cliccando sul link in basso nella pagina e controlla i risultati

 [principi di equivalenza](#)

 [Equazioni interattive](#)

Problemi con le equazioni

 [problemi con soluzione](#)

 [problemi di 1 grado](#)



Funzioni

 [Un gioco in inglese](#)

 [Proporzionalità diretta](#)

 [Proporzionalità inversa](#)

 [Proporzionalità quadratica](#)

Fig. 5 – Una sezione di corso Moodle

L'ambiente Moodle permette di costruire percorsi didattici finalizzati non solo a proporre attività che integrano la lezione in presenza ma anche al **recupero**. Diverse volte abbiamo proposto corsi misti online e presenza o interamente online in cui lo studente interagisce con il docente attraverso il forum a cui invia gli elaborati richiesti che vengono corretti e rispediti nel forum, nell'ottica di un recupero individualizzato ma anche collettivo dato che sia i lavori dello studente che le osservazioni dell'insegnante sono disponibili per tutti (Figura 6).

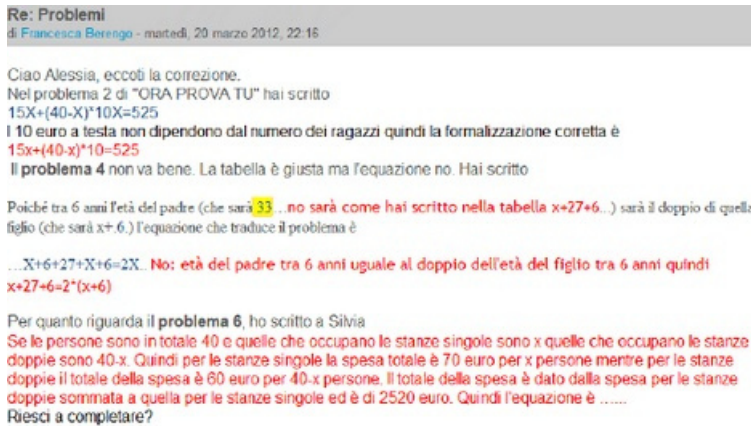
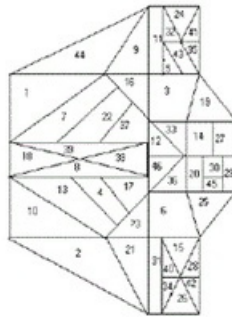


Fig. 6 – Forum per il recupero

Sono stati inoltre realizzati dei corsi/contenitori di materiali riusabili e/o modificabili da altri docenti.

Le tecnologie per potenziare le strategie didattiche

Uno dei *trucchi* che abbiamo spesso utilizzato per coinvolgere i ragazzi nelle attività didattiche è stato, soprattutto al biennio ma non solo, quello di immergerle, con l'aiuto delle tecnologie (nuove e meno nuove), in un **contesto ludico** o comunque più accattivante del solito esercizio di matematica: ad esempio i già menzionati *crucinúmero* e *labirinto*, ma anche test sotto forma di disegni celati (Figura 7a) o problemi proposti a *fumetti* (Figura 7b) e così via.



Per ogni quesito sono indicate due risposte, ognuna è contrassegnata da un numero scritto tra parentesi tonde. Scegli la risposta esatta e colora nel disegno solo lo spazio che reca il numero corrispondente. Alla fine, se hai risposto esattamente, otterrai un disegno che dovresti riconoscere.

1) Nell'uguaglianza $(a - b)(2c + d) = a(2c + d) - b(2c + d)$ è stata applicata la proprietà associativa della moltiplicazione (21) oppure la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione (8)

Fig. 7a – Disegno celato

MATRICE DEI GUADAGNI DI TOM	Se Tom decide di telefonare a Sally...	Se Tom decide di andare da Sally...
...e Justin è il primo a chiamare Sally	Probabilità: 35% del 70% (il necessario che Sally abbia rifiutato Justin) = <input type="text"/> %	Probabilità: 90% del 70% (il necessario che Sally abbia rifiutato Justin) = <input type="text"/> %
...e Justin è il secondo a chiamare Sally	Probabilità: <input type="text"/> %	caso non realistico
...e Justin va a trovare Sally di persona	Probabilità: <input type="text"/> %	Probabilità: 90% del 10% (il necessario che Sally abbia rifiutato Justin) = <input type="text"/> %

Fig. 7b – Matematica a fumetti

Ma le maggiori potenzialità che le tecnologie oggi offrono alla didattica sono essenzialmente queste:

- la disponibilità di ambienti come la piattaforma Moodle, che consen-

tono non solo di organizzare percorsi didattici strutturati consultabili in qualsiasi momento, ma anche di stimolare e facilitare il confronto fra gli alunni attraverso i forum di discussione, di attivare dinamiche di cooperazione nella creazione di wiki, glossari, ecc.;

- l'interattività, che permette il *learning by doing* e l'apprendimento per scoperta;
- i video e le animazioni, che permettono di creare tutorial (procedure, dimostrazioni guidate), lezioni (ripasso/recupero, ma anche [flipped-classroom](#)) o documentare esperienze didattiche;
- la massiccia presenza di software free (che permettono anche agli studenti di utilizzare le nuove tecnologie per imparare e creare i propri elaborati, anche fuori dall'orario scolastico).

E' probabile che nel prossimo futuro uno strumento principe per realizzare risorse didattiche innovative sarà un software (*free!*) per creare ipervideo.

E in ultimo... una proposta didattica

Gli strumenti di cui abbiamo parlato finora, però, sono davvero efficaci nel potenziare l'apprendimento e la motivazione dei ragazzi se l'attività didattica che prevede il loro utilizzo è ben congegnata.

Una figura dinamica costruita con GeoGebra, ad esempio, può davvero promuovere un apprendimento per scoperta, se riesce a provocare nei ragazzi quel senso di stupore che ogni scoperta porta con sé.

Un geniale esempio di questo genere è il problema che pone questa situazione:

Ariele ha trovato una mappa del tesoro che riporta le seguenti indicazioni: vai sull'isola segnata sulla carta. Appena sceso sull'isola troverai un melo M un pino P e una quercia Q. Da M dirigi in linea retta fino a giungere in P. Qui gira verso la tua sinistra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MP. Pianta in questa posizione un paletto P1. Quindi ritorna in M e da qui dirigi verso Q in linea retta. Giunto in Q gira a destra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MQ. Pianta, in questa posizione un paletto Q1. Il tesoro T si trova nel punto medio del segmento P1Q1. Ariele giunto sull'isola del tesoro ha la brutta sorpresa di

non trovare più il melo M. Ci sono P e Q ma non c'è M

Ecco la conseguente proposta di lavoro di gruppo:

- *Ariele potrà trovare ugualmente il tesoro?*
- *Se la risposta è affermativa, qual è la procedura per trovare il tesoro?*
- *Dimostrate la validità di tale procedura.*

Ai tempi della pubblicazione del [Quaderno interattivo di geometria](#) (originariamente su CD, poi sul web) da cui è tratto il problema, non si parlava ancora né di LIM, né di ambienti di apprendimento/condivisione che oggi il web 2.0 offre. Pertanto gli autori del Quaderno documentano la sperimentazione di questa attività in alcune classi citando, come unico strumento tecnologico utilizzato, Cabri.

I ragazzi possono realizzare il disegno (Figura 8) con un qualsiasi software di geometria dinamica e accorgersi (con sorpresa!) che il punto in cui è nascosto il tesoro è indipendente dalla posizione del melo.

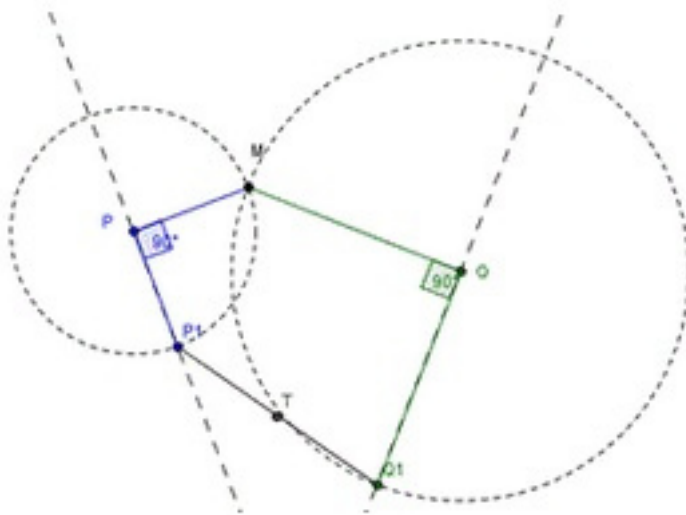


Fig. 8 - [Ariele potrà trovare ugualmente il tesoro?](#)

Oggi è possibile proporre la stessa attività arricchendola ulteriormente, ad esempio utilizzando la LIM per la discussione e la presentazione al resto della classe delle strategie risolutive progettate dai singoli gruppi di

lavoro, o predisponendo un wiki per avviare la costruzione collaborativa di una possibile dimostrazione.

Nel caso poi la classe non fosse sufficientemente attrezzata per giungere autonomamente a una dimostrazione, l'insegnante potrebbe fornire una **guidata**, o una dimostrazione semi-guidata (immagini animate senza spiegazioni testuali) e chiedere agli studenti di corredarla con un commento audio appropriato.

Dulcis in fundo ... si può chiedere ai ragazzi se la dimostrazione guidata proposta dall'insegnante contiene qualche difetto... e scoprire qual è il caso particolare in cui non funziona (Figura 9).

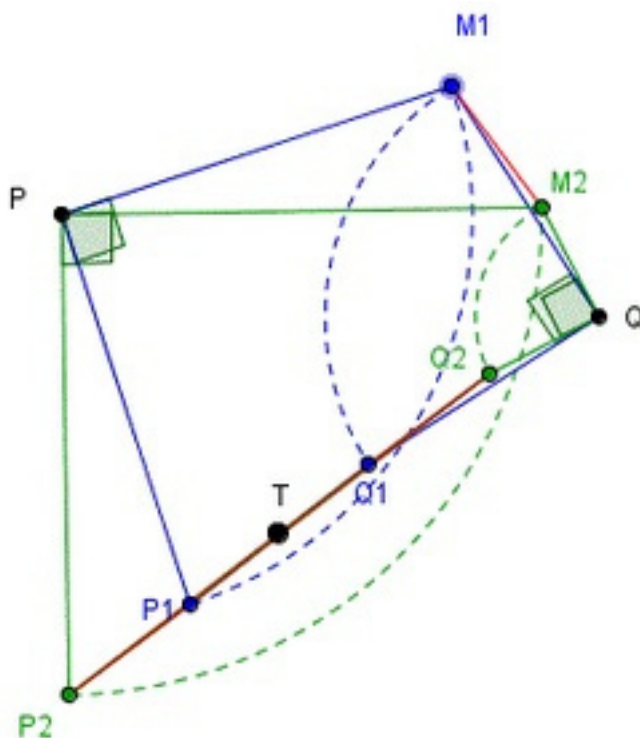


Fig. 9 – Caso in cui la dimostrazione non funziona

A questo punto rimane ancora da dimostrare il caso particolare e l'esplorazione della figura (Figura 10) con GeoGebra è illuminante per arrivare alla soluzione ...

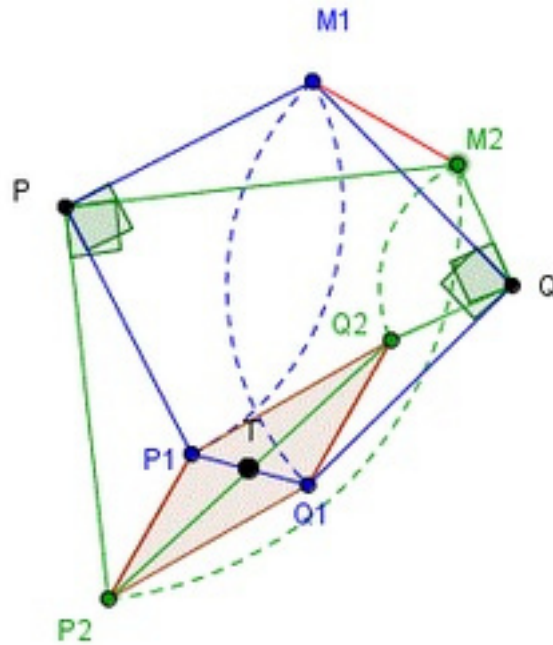


Fig. 10 - Cosa succede quando il parallelogramma scompare? Avanzare fino all'ultimo passo della costruzione e manipolare in modo opportuno il grafico

Provare per credere!