TEMA

Immagini, video e piattaforme digitali nella didattica della matematica; ispirazioni dall'estero e esperienze italiane

Dany Maknouz

Docente matematica e informatica presso Liceo scientifico – Scuola ebraica di Milano - Formatrice per Didattica e Tecnologia

danymak@gmail.com

Premessa: didattica matematica e applicativi

Ad oggi e da diversi anni, l'apporto tecnologico più consistente all'insegnamento-apprendimento della matematica è sempre stato identificato nell'uso di applicativi per il calcolo automatico e per l'esplorazione dinamica della geometria. Software quali Geogebra, Cabri, Derive, Wiris, per citare i più diffusi nelle scuole, a cui si aggiungono i più recenti motori di ricerca computazionali Wolfram Alpha e Symbolab, sono stati sperimentati negli anni in varie attività didattiche spesso documentate e condivise nei relativi wiki di riferimento (per es. geogebratube e wolframapha for educators). Nascono inoltre nuovi esperimenti web (Sketchometry) orientati all'uso su tablet che, sfruttando le potenzialità del *touchscreen*, propongono esperienze tattili interessanti per il disegno geometrico e il grafico di funzioni (http://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=2RzcoqiYWEY).

Degli apporti di tali software alla matematica si è già scritto molto e l'interesse al loro uso nella didattica si va approfondendo sempre più oggi che la diffusione inarrestabile di dispostivi mobili nelle scuole (a volte in rapporto 1:1) permette o permetterebbe sempre più agli studenti di avere questi potenti strumenti personalmente a disposizione durante le lezioni. Nuove domande si aprono sull'integrazione della tecnologia nella didattica della matematica, sulle competenze da sviluppare, sul livello di padronanza nel calcolo da 'esercitare'. Anche perché alcuni di questi strumenti, per es. su dispositivo mobile, permettono allo studente non solo di rispondere correttamente al testo di un esercizio, ma anche di trovare riprodotti tutti i passaggi della risoluzione.

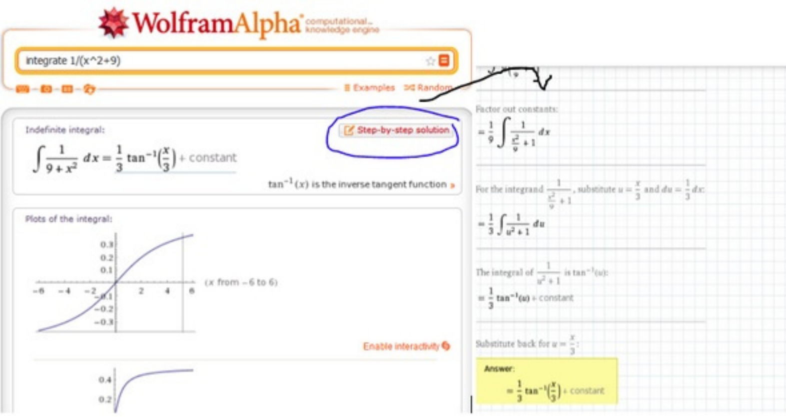


Fig. 1 – Wolfram alpha e la risoluzione step by step.

Vi è chi a questo punto, come **Conrad Wolfram**, (nel suo video Ted) teorizza l'importanza di liberare lo studente dall'eccesso di calcolo per aiutarlo a concentrarsi sulle strate*gie di approccio ai problemi e lancia appelli del tipo "**math ≠ calculating**"*, diventati siti e progetti web.

Idee certamente interessanti e condivisibili salvo poi, almeno in Italia, confrontarsi con un esame di Stato dove l'uso della calcolatrice (non grafica) appare a volte quasi tollerato più che apprezzato e solo tiepidamente incoraggiato o richiesto nell'ultimo punto di alcuni quesiti.

Una matematica visuale, un nuovo approccio possibile

Un secondo approccio possibile all'uso del digitale nella didattica della matematica è quello proposto e sollecitato da **Dan Meyer** (nel suo blog e nel video Ted) e consiste nel partire, ove possibile, dall'aspetto visuale di un problema invece che dalla sua espressione testuale. Brevi avvii multimediali (siano essi video o immagini) collocano lo studente in medias res, introducono in forma naturale un contesto di realtà e aprono a domande semplici socializzate nel gruppo classe. Questo è quello che Meyer definisce teatralmente il primo di 3 atti (3acts) coinvolgenti sia dal punto di vista cognitivo che affettivo e che permettono di mettere in gioco diverse competenze matematiche. Nel primo atto, grazie ad un'apertura visuale, gli studenti si trovano coinvolti nella formulazione stessa dei problemi e non solo nella loro risoluzione e sono invitati a proporre stime intuitive dei possibili risultati. Il secondo atto, centrale, li vede trovarsi, partendo dall'oggetto multimediale, a costruire un proprio modello di astrazione del problema, all'interno del quale selezionare e ricercare le informazioni utili e significative e a scegliere un adeguato sistema di rappresentazione entro il quale operare per trovare la soluzione.

L'atto finale è quello dell'argomentazione, della verifica e validazione delle soluzioni trovate; le proprie supposizioni e i propri risultati vengono controllati attraverso il confronto con la situazione originale (sempre in forma visuale) e il modello adottato accettato e nel caso ulteriormente affinato o rigettato.

L'approccio visuale, secondo Meyer, dovrebbe aumentare curiosità e dubbi e sopperire alla ricorrente mancanza di iniziativa e di memoria da parte degli studenti troppo spesso abituati al fatto che il numero di informazioni nei testi dei problemi sia precisamente uguale a quello presente nella formule da utilizzare e si trovino sempre alla ricerca di schemi da applicare in cui collocare i dati ricevuti.

Gli esempi proposti da Meyer sono molteplici. Il più famoso di questi è sicuramente quello relativo al tiro a canestro di una palla da basket http://vimeo.com/44572572. Il video del lancio proposto in classe si interrompe a metà lasciando in sospeso l'esito e incuriositi gli studenti che si trovano a indovinare cosa succederà del pallone e a chiedersi come verificarlo. Eccoli quindi inserire l'ultimo fotogramma del video in un file Geogebra, introducendo un sistema di assi cartesiani per costruire una parabola sulla traiettoria di volo, a concluderla. Gli studenti si trovano a operare in modo accurato sui coefficienti dell'equazione di secondo grado per adattare la curva alla traiettoria e al termine verificano la conclusione a cui sono giunti visualizzando la seconda parte del video (tutti i materiali compresi i file geogebra sono sul link di Meyer).

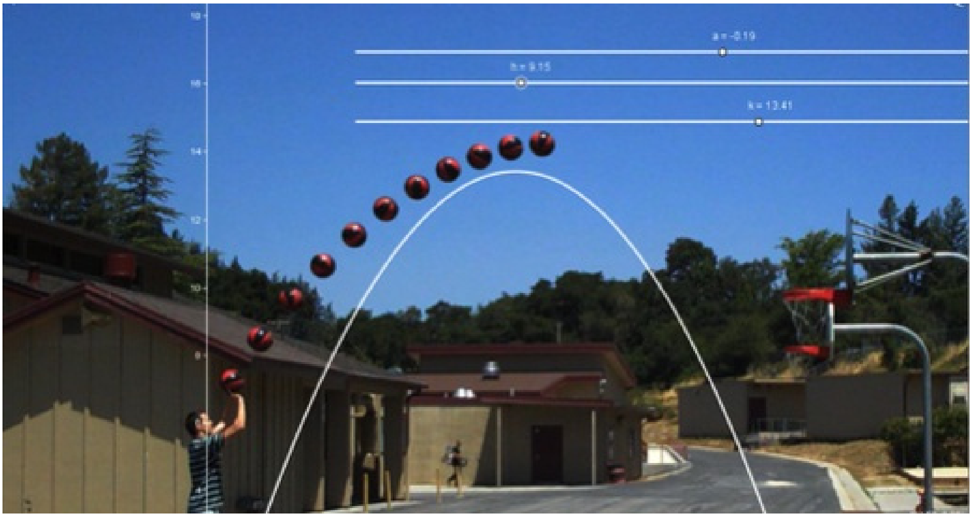


Fig. 2 – Will it hit the hop? 3acts di Dan Meyer.

Un ulteriore interessante esempio di Dan Meyer, tratto dall'ambito geometrico, è quello relativo al contenuto di una boraccia di caffè. Di nuovo viene proposto un video che, questa volta, mostra un contenitore riempito di acqua. Quale sarà il livello del liquido dopo la rotazione del contenitore? Di che dati avremo bisogno per deciderlo? Sarebbe possibile trovare una funzione del livello finale dell'acqua rispetto al livello iniziale d'acqua? (http://vimeo.com/42563840)

Per rispondere a queste domande, approfondire e reperire tutti i materiali didattici, video e commenti, relativi a tale attività è disponibile il link: http://threeacts.mrmeyer.com/coffeetraveler/

Difficile fermarsi qui con gli esempi anche perché gli spunti sono molteplici, spaziano nei vari ambiti matematici e sono tutti interessanti. Seguendo i suggerimenti del blog di Meyer ci si trova inevitabilmente a intraprendere con una certa soddisfazione nuove attività didattiche centrate sul visuale. Ecco allora un ultimo esempio di come sia possibile spiegare il calcolo delle percentuali partendo da un volantino elettronico delle offerte del giorno di ebay.

Fig. 3 – Le offerte del giorno, da ebay.it.

Posti di fronte al volantino, gli studenti restano sinceramente stupiti nel riconoscere che gli sconti applicati sono maggiori di quelli indicati (il segno meno davanti alla percentuale di sconto a prima vista non viene da loro considerato). I prezzi finali risultano infatti ricondotti al "prezzo psicologico", quello terminante con diversi '9', della decina precedente. Ecco allora sorgere le domande su quanto sia lo sconto effettivo o, coprendo alla LIM alcune zone del volantino con rettangoli bianchi, su quale sia il prezzo iniziale, lo sconto applicato o lo sconto complessivo nel caso si aggiunga un ulteriore bollino di sconto (tutte attività rese non banali dalla presenza del prezzo psicologico). Le soluzioni si svelano cancellando i rettangoli bianchi. La formulazione di generali regole algebriche di calcolo diventa a quel punto un'esigenza collettiva e viene accolta con buona motivazione.

In sostanza, come si evince da questi brevi esempi, questo tipo di azioni didattiche basate sull'uso 'tecnologico' del visuale, secondo l'idea di Meyer, porta il mondo reale in aula e trasforma in modo naturale i problemi in quesiti di matematica e realtà, abituando lo studente sempre più a leggere la matematica nella realtà che lo circonda e a sviluppare 'nuove' competenze matematiche. Tutto ciò senza che venga meno la parte operativa e di capacità di calcolo anche algebrico senz'altro decisamente presente nella parte centrale di ogni attività proposta. Tale approccio, percorribile anche in presenza del solo computer e videoproiettore, risulta particolarmente interessante se integrato con l'uso di LIM e/o, nel caso di classi 2.0, di Tablet per un'esplorazione anche individuale da parte degli studenti degli oggetti mediali da annotare e tracciare.

Il visuale nella matematica di Singapore

Un diverso approccio visuale che può trarre giovamento dall'uso dei nuovi strumenti, anche se in maniera del tutto differente da quello precedentemente esposto, è quello usato nella Repubblica di Singapore. Come noto, da più di un decennio, gli studenti di Singapore registrano esiti eccellenti (non solo) in matematica in tutti i test internazionali (TIMMS e PISA). Il focus centrale della loro didattica della matematica è il *problem solving* sviluppato secondo il modello pedagogico di **Bruner** CPA (Concrete – Pictorial – Abstract) che colloca l'approccio concreto e iconico-visuale come preliminare alla comprensione e all'apprendimento di concetti astratti. Sul sito www.banhar.com sono presenti diversi esempi di attività e esercizi particolarmente approfonditi sul curriculum matematico delle primarie e secondarie di primo grado e su un approccio alle operazioni aritmetiche incentrato sul dare senso e significato ai passaggi di calcolo.

Tali attività vengono svolte a Singapore con ampio impiego di cartoncini colorati, matite ritagli etc., ma ci sembra sempre più possibile e utile nelle nostre classi, soprattutto con studenti più grandi, sfruttare l'interattività e la flessibilità fornita dagli strumenti dei software LIM (o dei tablet individuali) per riprodurli. Tali strumenti software permettono l'uso di forme, di colori, il riposizionamento di oggetti e risultano utili per velocizzare le attività, recuperare in caso di errori e riutilizzare i contenuti opportunamente salvati (come esemplifica l'esercizio relativo all'operazione 3 diviso 3/4).

In realtà il metodo visuale più caratteristico dell'approccio matematico di Singapore è il cosiddetto metodo a barre. Di seguito viene riportato e risolto con tale metodo un esercizio che viene generalmente risolto algebricamente dai nostri studenti dell'ultimo anno di scuola secondaria di primo grado o dei primi anni di quella di secondo. Gli studenti di Singapore si mostrano invece a loro agio nella risoluzione 'visuale' dello stesso esercizio da ben più giovani.

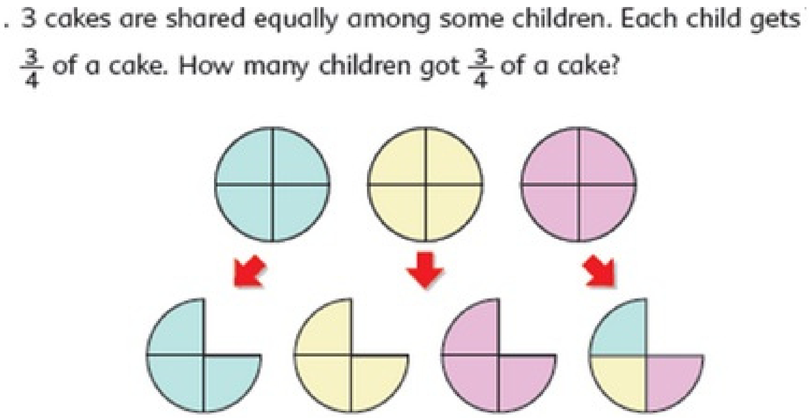


Fig. 4 – Dividere 3 per 3/4: da banhar.com.

Es: Il sig. Hoon ha cucinato dei biscotti,3/4 dei quali sono di cioccolato e i rimanenti di mandorle. Dopo aver venduto 210 biscotti di mandorle e i 5/6 dei biscotti di cioccolato, Hoon resta con 1/5 dei biscotti. Quanti biscotti ha venduto il sig Hoon?

Il metodo a barre, a dire il vero, appare già diffuso e utilizzato anche da diversi docenti italiani che spesso ne fanno uso proprio sfruttando gli strumenti della lavagna interattiva, ma in generale risulta poco presente nei libri di testo e poco 'convenzionale' o integrato nella didattica tradizionale, di solito più sbilanciata verso l'approccio algebrico. Ad ogni modo il metodo visuale anche per gli studenti di Singapore è solo preliminare a quello algebrico che viene comunque inserito in un secondo momento.

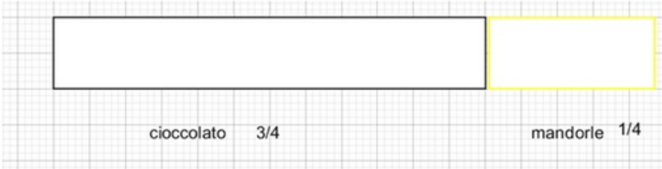
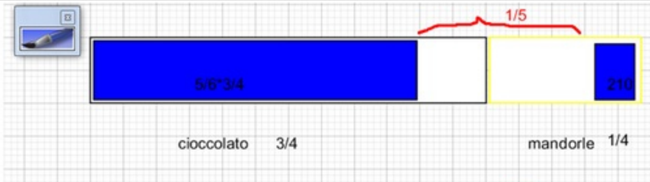
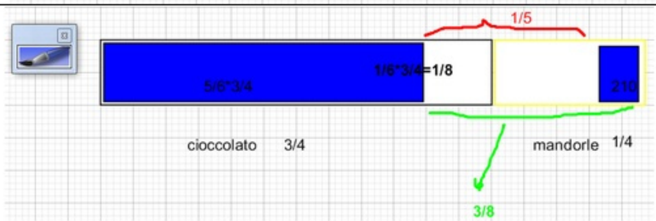
Si disegnano le barre, possibilmente riproducendo correttamente i rapporti	
Si evidenziano le parti eliminate (i biscotti venduti) in questo caso in blu	
Si trovano le informazioni numeriche mancanti 3/8=1/8+1/4	
Si trovano i biscotti venduti, cioè i 4/5 dei biscotti iniziali	$\frac{3}{8}-\frac{1}{5}=\frac{7}{40}\rightarrow 210$ $\quad \frac{1}{40}\rightarrow 30$ $\quad \frac{4}{5}=\frac{32}{40}\rightarrow 960$
	I biscotti venduti sono 960

Fig. 5 – Un'applicazione del metodo a barre di Singapore.

L'uso della calcolatrice è comunque incentivato per alcune tipologie di esercizi e l'uso di calcolatrici grafiche e computer viene previsto per i percorsi di eccellenza fin dalle primarie (come nell'esempio riportato sotto) per problemi di ottimizzazione che richiedano previsioni e motivazioni dei risultati sulla base di grafici di semplici funzioni.

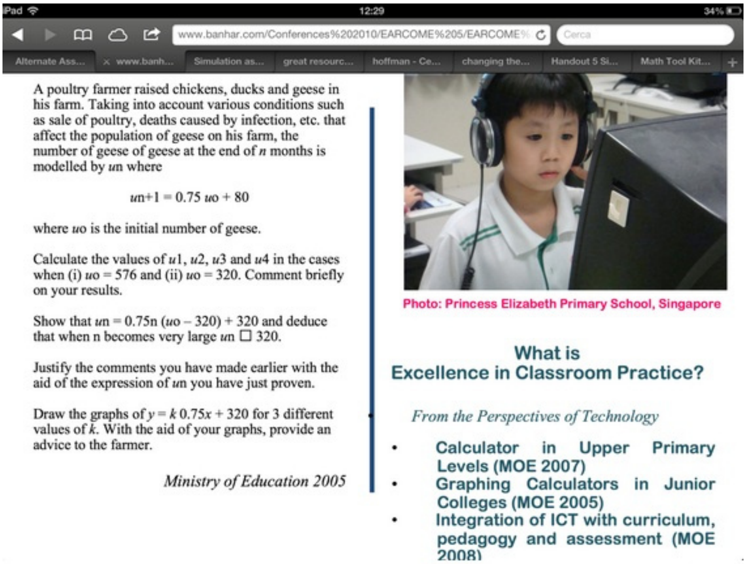


Fig. 6 – Singapore: esercizi e strumenti per studenti avanzati.

Piattaforme per l'apprendimento e libri digitali

Il visuale – sottoforma di video, animazioni e test interattivi – è presente oggi anche nelle diverse piattaforme *educational* associate ai libri di testo. Tra quelle fruibili liberamente segnaliamo il portale education di WA, e Matutor di Zanichelli.

La prima piattaforma, inglese, previa registrazione e installazione gratuita di CDF player, permette di accedere ad un testo di matematica digitale, esteso su tutti gli argomenti disciplinari, che integra strumenti di calcolo automatico (*widget*) e incorpora animazioni interattive dinamiche (anche 3D) di tipo 'esplorativo' (con barre di scorrimento) all'interno di spiegazioni teoriche. Vengono proposte pianificazioni di lezioni per i docenti e una ricca varietà di esercizi applicativi (non automatici) pensati in 'contesti reali'.

Matutor, fruibile liberamente nella parte dei contenuti da docenti e studenti registratisi gratuitamente a My.Zanichelli.it, è in Italia uno dei primi libri digitali di matematica che 'si fa piattaforma'. Dedicato soprattutto agli argomenti di matematica del quinto anno di liceo, per ogni argomento disciplinare propone porzioni teoriche testuali e esercizi graduati, video di spiegazioni sulle parti concettuali e sui metodi di svolgimento degli esercizi, animazioni interattive. Pensata per assecondare i diversi stili di apprendimento degli studenti, la piattaforma propone esercitazioni automatiche anche di tipo adattivo, cioè modulate sulla base delle risposte ricevute del singolo studente e regolate sul livello di preparazione di questo, che trova segnalati i suoi errori ed è guidato da un sistema 'tutor' al recupero degli stessi. Il sistema è inoltre integrato con la gestione automatica di classi virtuali che forniscono al docente registri automatici e statistiche, individuali e di classe, il tutto finalizzato ad attività di monitoraggio, personalizzazione e potenziamento degli apprendimenti.

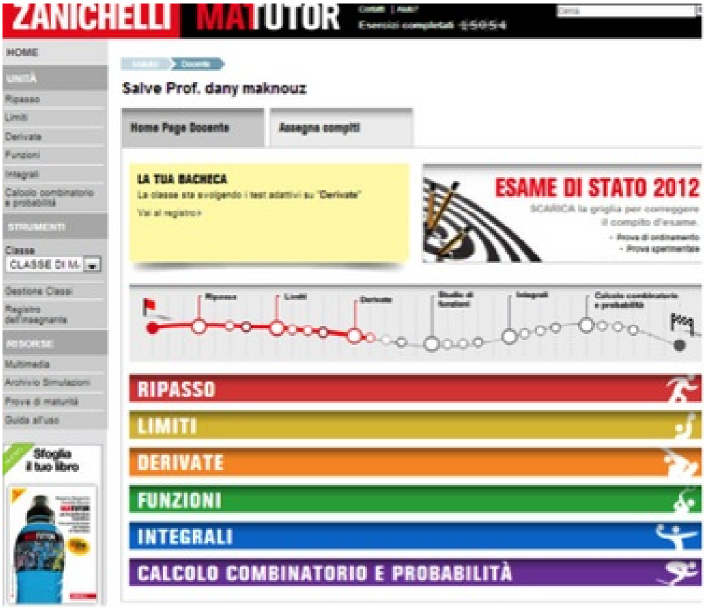


Fig. 7 – Piattaforma Matutor Zanichelli.

Segnaliamo infine che video didattici innovativi di matematica sono anche presenti nella nuova piattaforma ed.ted.com dove ogni video è accompagnato da domande di comprensione, link di approfondimento e l'opzione 'flip' per attuare con le proprie classi la nuova metodologia del '*flipped learning*'. Nell'apprendimento rovesciato, lo studente viene invitato a esaminare un video prima della lezione, in modo che quest'ultima possa essere il più 'laboratoriale' possibile e orientata alla risoluzione di problemi. Anche le piattaforme precedentemente citate potrebbero essere utilizzate in quest'ottica.

Conclusioni: riflettere sulla matematica

In conclusione le opportunità tecnologiche e metodologiche offerte dai nuovi strumenti sono molteplici e in prospettiva ci aspettiamo che i vari ambienti di lavoro integrino sempre più le risorse visuali con i problemi tradizionalmente posti e le attività esplorative anche di tipo touch con gli strumenti automatici consueti. Ma se la matematica non è solo calcolo, e si pone sempre più come 'pensare matematico', il visuale è sicuramente la chiave di ingresso per un nuovo mondo accattivante ed impegnativo al contempo. Nelle parole di Meyer "*generalmente chiediamo ai nostri studenti di lavorare ai pioli più alti della scala di astrazione e identifichiamo spesso un bravo studente di matematica come uno studente in grado implementare correttamente formule risolutive. Queste sono capacità senza dubbio importanti e utili, ma la matematica è anche la capacità di porre buone domande, proporre valide stime, creare forti astrazioni. E questo si ottiene al piolo più basso della scala dell'astrazione risalendo e riscendendo tutta la scala*". E magari, riflettendo sulla disciplina stessa, come avvenuto quest'estate, con centinaia di commenti postati nel blog di Repubblica, ad interrogarsi sul senso di fare matematica, sul valore dell'algebra, sul pensiero filosofico sottostante. Perché la tecnologia di rete permette anche questo: una riflessione collettiva e dialettica sulla matematica stessa … Magari, perché no, anche a margine della rivista e dell'articolo digitale che state or ora leggendo.